

26-03

26/03/19

$[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = \langle \vec{a}, \vec{\beta} \times \vec{\gamma} \rangle$
 $|[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]| = \text{όγκος παραλλ.πιδου με ακμ. τα } \vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$

Πρόταση: Τα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι Γ.Ε αν-ν $[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = 0$

Υπολογισμός $[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = a_1 \vec{x}_0 + a_2 \vec{y}_0 + a_3 \vec{z}_0$,
 $\vec{\beta} = \beta_1 \vec{x}_0 + \beta_2 \vec{y}_0 + \beta_3 \vec{z}_0$, $\vec{\gamma} = \gamma_1 \vec{x}_0 + \gamma_2 \vec{y}_0 + \gamma_3 \vec{z}_0$.

$$\vec{\beta} \times \vec{\gamma} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \vec{x}_0 - \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} \vec{y}_0$$

$$+ \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \vec{z}_0$$

$$[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = \langle \vec{a}, \vec{\beta} \times \vec{\gamma} \rangle = a_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ a_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Πρόταση: $[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

Ιδιότητες:

• $[\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = [\vec{a}_1, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] + [\vec{a}_2, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$
 • $[\lambda \vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = \lambda \cdot [\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$

$\left. \begin{array}{l} \text{Το πρώτο} \\ \text{γινόμενο} \\ \text{είναι γρ.} \\ \text{απεικόνιση} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\cdot \textcircled{\alpha, \beta, \gamma} [\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = -[\vec{a}, \vec{\gamma}, \vec{\beta}]$$

$$[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = [\vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{a}] = [\vec{\gamma}, \vec{a}, \vec{\beta}]$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{\beta} \times \vec{\gamma} \rangle = \langle \vec{\gamma}, \vec{a} \times \vec{\beta} \rangle$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το $\langle \vec{a} \times \vec{\beta}, \vec{\gamma} \times \vec{\delta} \rangle$

Λύση

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} \times \vec{\beta}, \vec{\gamma} \times \vec{\delta} \rangle &= \langle \vec{e}, \vec{\gamma} \times \vec{\delta} \rangle = \langle \vec{e} \times \vec{\gamma}, \vec{\delta} \rangle = \\ &= \langle (\vec{a} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}, \vec{\delta} \rangle = \\ &= \langle \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle \vec{\beta} - \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle \vec{a}, \vec{\delta} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle \langle \vec{\beta}, \vec{\delta} \rangle - \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle \langle \vec{a}, \vec{\delta} \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{a} \times \vec{\beta}, \vec{\gamma} \times \vec{\delta} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{\delta} \rangle \\ \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \rangle & \langle \vec{\beta}, \vec{\delta} \rangle \end{vmatrix}$$

$$\langle \vec{a} \times \vec{\beta}, \vec{a} \times \vec{\beta} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \\ \langle \vec{\beta}, \vec{a} \rangle & \langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{a} \times \vec{\beta}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{\beta}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle^2$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το $(\vec{a} \times \vec{\beta}) \times (\vec{\gamma} \times \vec{\delta})$

Λύση

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{\beta}) \times (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) &= (\vec{a} \times \vec{\beta}) \times \vec{e} = \\ &= \langle \vec{a}, \vec{e} \rangle \vec{\beta} - \langle \vec{\beta}, \vec{e} \rangle \vec{a} = \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \times \vec{\delta} \rangle \vec{\beta} - \langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \times \vec{\delta} \rangle \vec{a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \times \vec{\beta}) \times (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) = [\vec{a}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}] \vec{\beta} - [\vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}] \vec{a}$$

Ανάλυση των 2×2 ορίζουσας = εφραδα
 " " 3×3 " = όγκος

$$(\vec{a} \times \vec{\beta}) \times (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) = \vec{v} \times (\vec{\gamma} \times \vec{\delta}) = \langle \vec{\delta}, \vec{v} \rangle \vec{\gamma} - \langle \vec{\gamma}, \vec{v} \rangle \vec{\delta} =$$

$$= \langle \vec{\delta}, \vec{a} \times \vec{\beta} \rangle \vec{\gamma} - \langle \vec{\gamma}, \vec{a} \times \vec{\beta} \rangle \vec{\delta}$$

$$[(\vec{a} \times \vec{\beta}) \times (\vec{\gamma} \times \vec{\delta})] = [\vec{\delta}, \vec{a}, \vec{\beta}] \vec{\gamma} - [\vec{\gamma}, \vec{a}, \vec{\beta}] \vec{\delta}$$

Άρα, $[\vec{\delta}, \vec{a}, \vec{\beta}] \vec{\gamma} - [\vec{\gamma}, \vec{a}, \vec{\beta}] \vec{\delta} =$
 $= [\vec{a}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}] \vec{\beta} - [\vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}] \vec{a} \iff [\vec{\gamma}, \vec{a}, \vec{\beta}] \vec{\delta} = [\vec{\delta}, \vec{a}, \vec{\beta}] \vec{\gamma}$
 $- [\vec{a}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}] \vec{\beta} + [\vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}] \vec{a}$

Αν $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι ΓΑ. σημαίνει ότι
 $[\vec{\gamma}, \vec{a}, \vec{\beta}] = [\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] \neq 0$

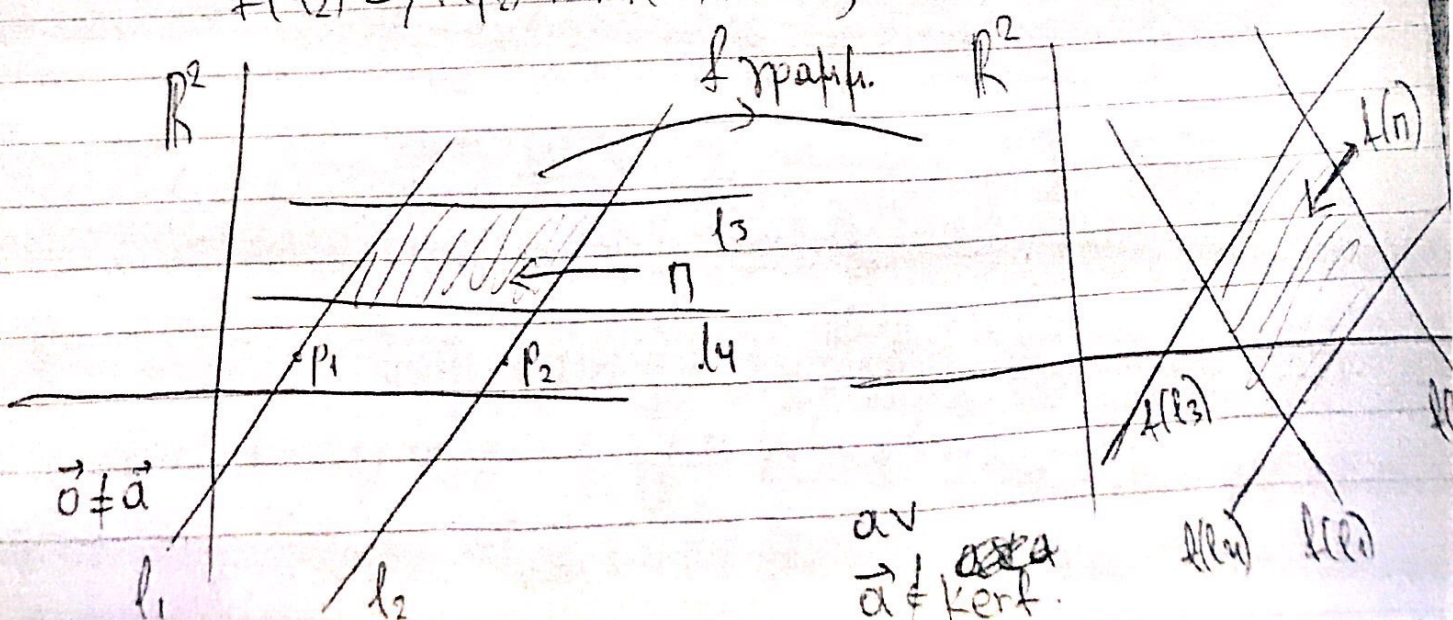
τότε, $\vec{\delta} = \frac{[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\delta}]}{[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]} \vec{\gamma} + \frac{[\vec{a}, \vec{\delta}, \vec{\gamma}]}{[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]} \vec{\beta} + \frac{[\vec{\delta}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]}{[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]} \vec{a}$

$$l_1 = \{p_1 + \lambda \vec{a} / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$l_2 = \{p_2 + \lambda \vec{a} / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$f(l_1) = \{f(p_1) + \lambda f(\vec{a}) / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$f(l_2) = \{f(p_2) + \lambda f(\vec{a}) / \lambda \in \mathbb{R}\}$$



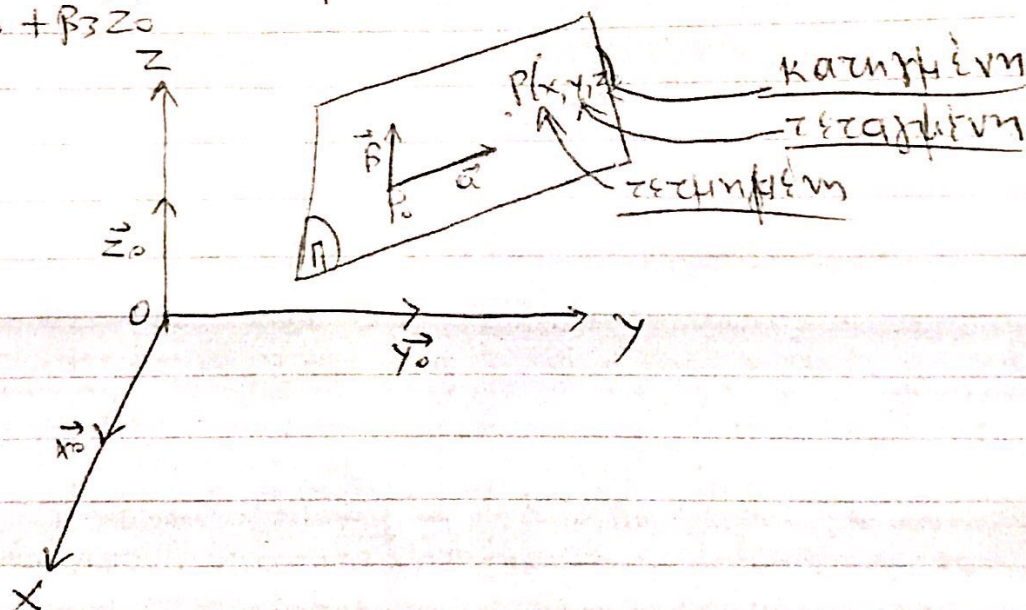
$$\frac{\text{εμβαδό } f(\Pi)}{\text{εμβαδό}(\Pi)} = |\det f|$$

Ομοίως για $\mathbb{R}^3$ με παραλληλιπώδεα
 και $\frac{\text{όγκος } f(\Pi)}{\text{εμβαδό}(\Pi)} = |\det f|$

Αν $\text{εμβαδό} = 0$ τότε $|\det f| = 0$
 άρα $\exists \ker f$

Επίπεδο

Το επίπεδο το οποίο διέρχεται από το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλο προς τα Γ.Α. διανύσματα $\vec{a} = a_1\vec{x}_0 + a_2\vec{y}_0 + a_3\vec{z}_0$, $\vec{\beta} = \beta_1\vec{x}_0 + \beta_2\vec{y}_0 + \beta_3\vec{z}_0$



$$\vec{OP}_0 = x_0\vec{x}_0 + y_0\vec{y}_0 + z_0\vec{z}_0$$

$$\vec{OP} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$$

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + \vec{P_0P}$$

$$\vec{P_0P} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ διανυσματική εξίσωση του επιπέδου Π .

$$\vec{r}_0 P = \lambda(a_1, a_2, a_3) + \mu(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\lambda a_1 + \mu \beta_1, \lambda a_2 + \mu \beta_2, \lambda a_3 + \mu \beta_3)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a_1 + \mu \beta_1 \\ y = y_0 + \lambda a_2 + \mu \beta_2 \\ z = z_0 + \lambda a_3 + \mu \beta_3 \end{cases}$$

→ Παραμετρικές
εξισώσεις
 λ, μ = παράμετροι

επειδή $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι Γ.Α. έχω ότι $\vec{a} \times \vec{\beta} \neq \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_2 a_3 & -a_1 a_3 & a_1 a_2 \\ \beta_2 \beta_3 & -\beta_1 \beta_3 & \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix} \neq (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda a_1 + \mu \beta_1 = x - x_0 \\ \lambda a_2 + \mu \beta_2 = y - y_0 \\ \lambda a_3 + \mu \beta_3 = z - z_0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & x - x_0 \\ a_2 & \beta_2 & y - y_0 \\ a_3 & \beta_3 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\vec{r}_0 P, \vec{a}, \vec{\beta}] = 0$$

↓
αναλυτική
εξίσωση επιπέδου



$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} (x-x_0) - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} (y-y_0) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} (z-z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \quad (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$$

όπου $A = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$, $B = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$

$$D = \dots$$

Πρόβλημα: Μία εξίσωση της μορφής
 (*) $Ax + By + Cz + D = 0$ με $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ παριστάει
 επιπέδο;

Απάντηση: ΝΑΙ

Υποθέτω ότι $C \neq 0$

$$\text{Τότε (*)} \Rightarrow z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + (1) \lambda + (0) \mu \\ y = 0 + (0) \lambda + (1) \mu \\ z = -\frac{A}{C} \left(-\frac{A}{C} \lambda - \frac{B}{C} \mu \right) \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\left(1, 0, -\frac{A}{C}\right), \left(0, 1, -\frac{B}{C}\right) \text{ Γ.Α. επειδή δεν} \\ \text{έχουν ανάλογες}$$

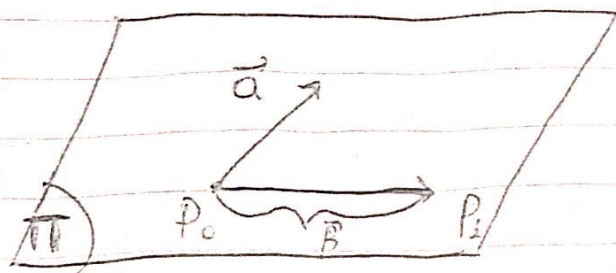
συντεταγμένες

Αν $D=0$ τότε η (*) είναι διεδρισ-
 στατος υπόχωρος, αφού $(0, 0, 0) = 0$.

Τρόποι καθορισμού επιπέδου

- Δίνεται σημείο P_0 του επιπέδου και δύο διανύσματα παράλληλα προς αυτό και Γ.Α.
- Δίνονται σημεία $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$

και διάνυσμα $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0} \parallel \epsilon\pi\iota\pi\epsilon\delta\omicron$
 και μη συγχρημικό με το $\overrightarrow{P_0 P_1}$



• Δίνονται 3 μη συνευθειακά σημεία
 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

